# 1. Применение пакета MATHCAD для кинематического анализа

# и синтеза механизмов

Кинематический анализ и синтез механизмов удобно проводить с помощью прикладной программы Mathcad.

Основным достоинством профессиональной версии является наличие панели операторов программирования. При запуске системы на экране автоматически появляется панель, содержащая восемь кнопок (в обычной непрофессиональной версии – семь). При активизации этих кнопок на рабочем поле появляются следующие панели инструментов:

**Arithmetic** (вычисления) - основные математические операторы;

**Graph** (графики) - инструменты построения графиков;

**Matrix** (матрицы) - шаблоны для матриц и векторов, а также набор операторов матричного анализа;

**Greek** (греческий) - малые и большие буквы греческого алфавита

**Symbolic** (символы) - операторы символьной математики;

**Calculus** (математический анализ) - операторы математического анализа;

**Evaluation** (сравнения) - операторы сравнения и присвоения;

**Programming** (программирование) - набор средств для составления программных блоков.

В случае, если вышеупомянутая панель с кнопками отсутствует на экране необходимо зайти в меню View (настройка), активизировать подменю Toolbars (панели инструментов), и поставить галочку против позиции Math (математика). Обычно какие – либо панели при работе с системой оставляют постоянно на рабочем листе, другие находятся в свёрнутом виде.

Описывать такие операции как сложение, вычитание, нахождение прямых и обратных тригонометрических функций нет смысла. Можно только особо заметить, что в системе используется несколько видов знака « = ».

Обозначение : = используется в качестве оператора присвоения

Обозначение = используется в качестве оператора ВЫЧИСЛИТЬ.

Необходимо отметить, что если при задании какой – либо величины в первый раз использовать оператор =, то он автоматически преобразуется в оператор : =. При повторном обращение к этой величине, после ввода =, система будет выдавать значение самой величины. Кроме того, существует оператор глобального присваивания, т.е. если глобально присвоить некоторой переменной какое – либо значение, то она сохранит его на всём протяжении документа. Значения величин, заданных другими операторами равенства, могут меняться на протяжении документа пользователем.

При определении скоростей и ускорений следует использовать значения перемещений искомой точки с последующим дифференцированием полученного массива значений. На практике это выглядит следующим образом. На панели МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ курсор мыши подводится к нужному шаблону, например к производной первого порядка и нажимается левая кнопка мыши. В рабочем окне должен появиться шаблон, в котором на месте дифференцируемой величины и переменной дифференцирования, имеются небольшие квадраты, на место которых записываются упомянутые параметры. Аналогично производится интегрирование.

Одним из основных достоинств профессиональной версии является наличие инструментов линейного программирования. На вышеупомянутой панели присутствуют следующие операторы:

***Add Line*** – создаёт, а при необходимости, расширяет жирную вертикальную линию, справа от которой в шаблонах задаётся запись программного блока.

<- символ локального присваивания (в теле модуля)

if – оператор условного выражения

for – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений

while – оператор задания цикла типа « пока» (цикл выполняется пока выполняется некоторое условие)

otherwise – оператор иного выбора (обычно применяется с if)

break – оператор прерывания

continue – оператор продолжения

return – оператор возврата

on error – оператор обработки ошибок

***Оператор Add Line*** выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому, в принципе, можно создавать сколь угодно большие программы

***Оператор внутреннего присваивания <-***

Данный оператор выполняет функцию внутреннего, локального присваивания. Например, выражение Х <-123 присваивает переменной Х значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое значение Х сохраняет только в теле программы.

***Условный оператор if***

Оператор if является оператором для создания условных выражений. Он задаётся в виде:

Выражение if Условие

Если условие выполняется, то возвращается значение выражения.

***Оператор for***

Оператор for служит для организации циклов с заданным числом повторений. Он записывается в виде:

for Var ∈ Nmin…Nmax

где Var - некоторая переменная, по которой организуется цикл, а Nmin, Nmax - начальное и конечное значения цикла.

***Оператор while***

Данный оператор служит для организации циклов действующих до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Этот оператор записывается в виде :

While Условие

***Оператор otherwise***

Оператор иного выбора otherwise обычно используется совместно с оператором if. Это поясняет следующая программная конструкция.

F(x) = | 1 if x>0 возвращает 1 если х>0

| -1 otherwise возвращает -1 во всех остальных случаях.

***Оператор break***

Оператор break вызывает прерывание работы программы всякий раз, как он встречается. Чаще всего он используется совместно с оператором условного выражения if и операторами циклов, обеспечивая переход в конец тела цикла.

***Оператор continue***

Оператор продолжения используется для продолжения работы после прерывания программы. Он также чаще всего используется совместно с операторами задания циклов, обеспечивая возврат в точку прерывания и продолжение вычислений.

***Оператор – функция возврата return***

Особый оператор return прерывает выполнение программы и возвращает значения своего операнда, стоящего рядом за return

***Оператор on error***

Оператор обработки ошибок позволяет создавать конструкции обработки ошибок. Этот оператор задаётся в виде

Выражение 1 on error Выражение 2

Если при выполнении Выражения 2 возникает ошибка, то выполняется Выражение 1.

Кинематический анализ любого механизма в системе MATHCAD проводится достаточно просто. Прежде всего, задаются параметры механизма: длинны звеньев, координаты неподвижных точек, угловая скорость ведущего звена, коэффициент сборки (Р). Далее назначается изменение угла поворота кривошипа в виде: 0.001,0.1….364.99, где 0.001 – начальное значение угла, рекомендуется не нулевое значение потому, что некоторые тригонометрические функции при нуле принимают нулевое значение, и как только они оказываются в знаменателе, машина зависает. При всех своих возможностях MATHCAD не может представить в численной форме выражения типа 0/0,А/0 и.т.п. По этой же причине конечное значение следует принимать не 365, а 364.99 градусов. Значение стоящее после запятой, шаг, он задаётся пользователем, по умолчанию равен единице. Все выражение набирается следующим образом: указывается имя переменной (т.е. угла поворота ведущего звена) на панели ВЫЧИСЛЕНИЯ нажимается знак : = указывается начальное значение переменной, и шаг (шаг не может быть меньше начального значения) на панели ВЫЧИСЛЕНИЯ нажимается знак m..n, в появившемся шаблоне указывается конечное значение. При необходимости можно указать единицу измерения величины через знак умножения. По умолчанию все измерения в системе производятся в системе СИ. Однако MATHCAD не всегда может перевести одну единицу в другую. Далее формируется вычислительный блок, т.е. вводятся все необходимые формулы. Система условий для определения угла наклона дополнительной системы координат формируется следующим образом.

Вводится идентификатор, соответствующий углу, имя которого должно обязательно содержать имя независимой переменной (угла поворота кривошипа), т.е. например ϕ(i), если i - независимая переменная.

Для набора программы проводятся следующие операции:

- с панели ВЫЧИСЛЕНИЯ вводится знак:=

- с панели ПРОГРАММИРОВАНИЕ вводится оператор Add Line. Справа от знака равенства появляется жирная вертикальная линия, справа от которой имеются шаблоны. Оператор Add Line вводится несколько раз, но можно подвести визир (красный крестик) к одному из шаблонов и нажать клавишу Enter.

В первый из шаблонов (считая сверху) вводится кодовое слово while. Справа и снизу от оператора появятся шаблоны. Справа вводится условие, снизу формируется цикл. К шаблону снизу, подводится курсор и вводится оператор Add Line. В первый из шаблонов под оператором while вводится первое условие, ниже второе условие, которое выполняется в том случае, если не выполняется первое. Условия вводятся операторами if и otherwise. После задания условий вводится оператор break.

На практике это выглядит так

**ϕ(i) : = | while ϕ >=0**

**| | ϕ1 <- ϕ if (ay(i)-by) >=0**

**| | ϕ1 <- ϕ + 180\*deg otherwise**

**| | break**

**| while ϕ <= 0**

**| | ϕ1 <- ϕ +180\*deg if (ay(i)-by)>=0**

**| | ϕ1 <- ϕ +360\*deg otherwise**

**| | break**

**| ϕ1**

***Оператор break*** необходим для прерывания вычислений при выполнении одного из условий. Вычисленный результат выводится в виде таблицы.

Еще одним немало важным достоинством системы являются ***операторы работы с файлами***. В систему включены семь операторов, но для расчётов обычно применяются три из них.

**READ** (« имя файла»).

Этот оператор считывает данные из файла с указанным именем. Аргументом оператора является строковая переменная, поэтому имя файла помещается в кавычки.

**WRITE** («имя файла»).

Этот оператор записывает данные в файл и присваивает ему некоторое имя.

WRITE (« имя файла») := выражение (имя файла обязательно берётся в кавычки)

**WRITEPRN** (« имя файла»).

Этот оператор подобен предыдущему, но применяется для записи в файл матрицы. Считывать данные, записанные при помощи этого оператора, можно оператором READ.

Рассмотрим на конкретном примере задание табличных значений профиля кулачка. Прежде всего, задаются углы подъёма и опускания, обозначенные буквой i. Далее через панель МАТРИЦЫ задаётся вектор размером 1/68. Такой размер выбран потому, что углы подъёма и опускания равны 68°. Заполнение вектора производится вручную. Далее данные обоих векторов записываются в файлы, которым присваивается некоторое имя, оператором WRITEPRN, после чего в этом же документе выводятся оператором READ. Такой прием необходим для того, что данные обоих векторов непосредственно для построения графика использовать нельзя. Поэтому эти значение записываются оператором WRITEPRN, а выводятся как обычная таблица значений.

Далее производится построение графика профиля кулачка. Сначала задаётся некоторая переменная, которая изменяется от 0 до 360. Обычно кулачок задаётся с помощью нескольких векторов, один из которых описывает профиль на фазе подъёма, другой на фазе опускания. Для соединения данных этих векторов в один существует оператор if. Он вводится с клавиатуры.

Х(i) := if(условие, выражение выполняемое при истинности условия, выражение выполняемое когда условие ложно ).

Допустим, что необходимо построить профиль кулачка, который описывается двумя вышеназванными векторами, r1(i), и r2(i). Значения перемещений ведомого звена на первом выстое составляет150 мм, а на втором - 100 мм. Фазовые углы составляют 68°, 50°, 68°, 174° соответственно.

Текст программы будет выглядит при этом следующим образом:

I = 0, 0.03..2\*π

R(i)=if(0<i<68\*deg,r1(i),0)+if(69\*deg<i<118\*deg,150,0)+if(119\*deg<i<186\*deg,r2(i),0) + if(187\*deg<i<360\*deg,100,0)

Множитель deg означает градусы. Это показано лишь для примера, на практике можно задавать значения i в радианах. Все значения углов без указания размерности система принимает в радианах. Результат данного вычисления можно просмотреть на графике, или вывести в виде таблицы чисел. Для этого необходимо набрать R(i) = и щёлкнуть курсором на свободном месте документа. Справа таблицы есть шаблон для указания единиц размерности. Если вычисления ведутся с использованием единиц измерения, то машина его заполняет автоматически.

Полученные значения профиля строятся на графике. Для построения двумерного графика с панели ГРАФИКИ вызывается шаблон для вышеупомянутого типа графика. На шаблоне имеются снизу и слева посередине места для указания переменных. После заполнения шаблонов щелкают левой клавишей мыши по полю графика. Отмечу, что при изменение любого параметра график автоматически перестраивается. После построения графика значения профиля кулачка записываются оператором WRITE.

Для большей наглядности можно построить кулачок в полярной системе координат. Это делается следующим образом: с панели ГРАФИКИ вызывается шаблон для построения этого типа графика. В шаблон (на графике) справа записывается R(i), в шаблон снизу i если вычисления проводились в радианах, или i\*π/180 если вычисления проводились в градусах. Далее щёлкают курсором на свободном месте документа.

Достаточно важным пунктом в работе с системой MATHCAD является обработка данных. Нередко бывает, что известен закон движения выходного звена механизма в виде таблицы или графика, а требуется получить более точный результат. Для этого служат функции обработки данных сплайнами и линейная интерполяция.

Прежде всего, задаётся массив значений, первый столбец которого, допустим, содержит значения угла поворота, а второй - соответствующие перемещения. После этого производится запись документа в следующем виде:

F := csort (F,0) - производится сортировка значений матрицы F по возрастанию

 выделяются столбцы матрицы соответствующие углу поворота и перемещению

S = cspline (X, Y) - определяются коэффициенты сплайна.

F(x) := interp (S,X,Y,x) - производится сглаживание функции.

Далее строится график по полученным в предыдущей строке значениям, и переменной Х, которая представляет собой первый столбец матрицы.

**2. Кинематический анализ механизмов технологических машин**

Задачами кинематического анализа являются следующие: определение перемещений, скоростей, ускорений. Наиболее целесообразно решать эти задачи аналитическим методом, разбивая механизм на группы Ассура и проводя последовательно анализ всех групп.

Ввиду того, что для получения результатов необходимой точности требуется производить большое количество вычислений, можно использовать математический пакет MATHCAD.

Для этой цели вводятся следующие обозначения:

i - угол поворота кривошипа отсчитываемый от положительного направления оси ОХ

α(i),β(i) – углы поворота звеньев механизма.

Х(i), Y(i) – координаты точек механизма в системе ХОY

ρ(i) – радиус вектор механизма в полярной системе координат.

# 2.1. Кинематический анализ структурных групп

Структурной группой (группой Ассура) называется кинематическая цепь, которая обладает нулевой подвижностью, и не может быть расчленена на две или более цепи, обладающие тем же свойством. В современных механизмах нашли широкое применение группы первого, второго, третьего класса, первого, второго видов.

**Кинематический анализ механизмов первого класса**

В связи с тем, что в технологических машинах нашли широкое применение механизмы с дисковыми кулачками, вместо механизма первого класса введем понятие вектора. В общем случае его можно рассматривать, как некоторый вектор L, длина которого может быть постоянной (в случае кривошипа) или переменной (в случае кулачка).Независимо от этого координаты точки А можно определять по одинаковым формулам.

AX = L cos(ϕ), (2.1)

AY = L sin(ϕ), (2.2)

Результаты могут быть представлены двояко: либо в виде таблицы значений проекций точки А (AX, AY), либо в виде вектора L и соответствующего ему значения угла наклона ϕ. Последний вид записи, в полярных координатах, применяется в основном для кулачковых механизмов.

##### 

##### Рис.2.1.Механизм первого класса первого порядка

В программах полученные значения записываются в массив, которому присваивается некоторое имя. Если точка О имеет ненулевые координаты, то это должно быть учтено в формулах:

AX = OX + L cos (ϕ), (2.3)

AY = OY + L sin (ϕ), (2.4)

Определение скоростей и ускорений в механизмах первого класса можно провести аналитически или дифференцируя полученный массив значений перемещений. Более удобным представляется последнее, тем более, что на современных ЭВМ эта операция занимает несколько секунд.

Определение скорости точки А аналитическим методом производится в соответствии с выражениями:

VX = -ω L sin (ϕ), (2.5)

VY = ω L cos (ϕ), (2.6)

Полная скорость точки А определяется как сумма векторов VX и VY. При нахождение скорости точки А дифференцированием массива значений перемещений необходимо умножить значения аналогов скоростей на величину угловой скорости вращения кулачкового вала (ω). Полученные значения записываются в массив, которому присваивается новое имя.

Для определения ускорений точки А в аналитическом виде запишем:

, (2.7)

 (2.8)

где а, ε - соответственно линейные и угловые ускорения точки А.

Значения ускорений точки записываются в массив, которому присваивается некоторое имя.

*Примечание*: следует отметить, что если алгоритм для всего механизма будет формироваться в одном документе, то запись данных в массив производить необязательно.

В некоторых случаях, в кулачковых механизмах, удобнее находить не координаты центра ролика, а массив значений радиусов–векторов переменной длины и значения углов наклона этих векторов, измеряемых от центра кулачка до некоторой точки, к которой присоединяется следующая группа Ассура.

Рассмотрим определение радиус–вектора R, на примере дискового кулачкового механизма (рис. 2.2).

Анализ механизма (рис. 2.2) предлагается производить следующим образом:

1. Определяем проекции точки А на оси Х и Y по формулам 2.1 и 2.2;

2. Находим угол АО2О1 по формуле

. (2.9)

*Примечание*: при использовании системы MATHCAD можно использовать следующие функции Angle (X, Y); atan2 (X, Y)., подробнее об этом смотри ниже. Обе эти функции возвращают значение угла наклона вектора по известным значениям координат Х и Y точки.

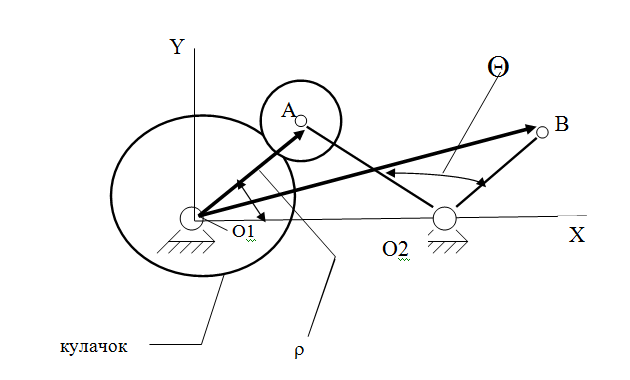


Рис 2.2. Расчетная схема трехзвенного кулачкового механизма

3. Находим значение радиуса-вектора R по формуле:

, (2.10)

4. Зная величину вектора R, по теореме синусов находим угол ВО1О2

, (2.11)

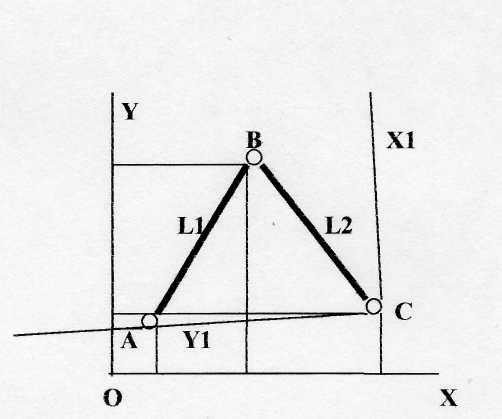
Полученные значения радиусов – векторов и углов записываются в массив, которому присваивается имя.

Скорости и ускорения рассматриваемой точки можно получить, продифференцировав массив значений разности текущих и минимального радиуса-вектора и умножив полученные значения на величину угловой скорости и значение квадрата угловой скорости кулачка соответственно.

# Кинематический анализ механизмов второго класса

Как говорилось выше, существует несколько схем механизмов второго класса. В современной технике наибольшее распространение нашли механизмы первого, второго и третьего вида

Для кинематического анализа группы **второго класса первого вида** предлагается ввести вспомогательную систему координат Х1CY1. Обозначим длины звеньев АВ и ВС, как L1 и L2. Определим координаты, скорость и ускорение точки В. Введем условный параметр Р, характеризующий положение точки В на координатной плоскости. Его (параметр Р) будем считать равным 1, если при обходе треугольника АВС против движения часовой стрелки мы последовательно встретим вершины А, В, С. В противном случае Р = -1.



#### Рис. 2.3. Группа Ассура второго класса первого вида

Как видно из рис.2.3 задача определения положений данной группы сводится к решению треугольника АВС.

Расстояние АС на координатной плоскости определяется по   
формуле

**,** (2.12)

Поместим в точку С начало вспомогательной системы координат X1CY1. Угол поворота этой системы координат относительно исходной

**,** (2.13)

Формула (2.13) может существовать только в частном случае. В общем случае угол ϕ определяется из системы:

**,** (2.14)

Угол между осями Х и Y 1 определяется по формуле:

φ1 = φ - 90, (2.15)

Для нахождения координат точки В в системе X1CY1 рассмотрим треугольник АВС

**,** (2.16)

, (2.17)

, (2.18)

##### Координаты точки В системе координат (XOY) определятся:

, (2.19)

, (2.20)

При известных координатах точки В углы ориентации звеньев L1 и L2 можно вычислить:

**,** (2.21)

 , (2.22)

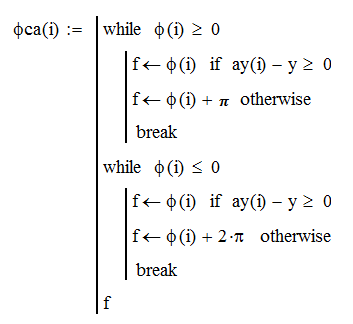
При этом значения координат точки В записываются в массив, которому присваивается имя. Скорости и ускорения точки В можно определить двумя способами: аналитическим и методом дифференцирования массива значений перемещений. Формулы для аналитических расчётов ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Определение скоростей и ускорений посредством дифференцирования значений перемещений аналогично идентичным действиям для механизма первого класса. С использованием прикладной программы Mathcad определим перемещения b(i), скорости vb(i), ускорения ab(i) для точки В группы Ассура второго класса первого вида. Программа будет иметь вид:







В результате проведенных расчетов получены кинематические параметры механизма. Перемещения скорости и ускорения приведены на рис. 2.4.







Рис. 2.4. Кинематические характеристики для группы Ассура второго класса первого вида

Рассмотрим кинематический анализ группы второго класса второго вида (рис. 2.5).

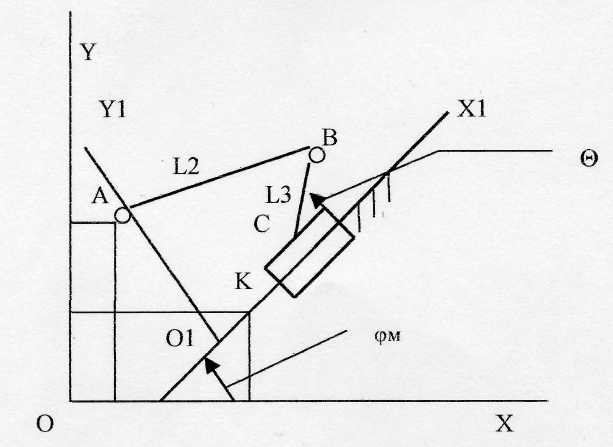


Рис. 2.5. Группа второго класса второго вида

Заданными параметрами являются длины звеньев 2 и 3, углы Θ и ϕм, координаты точек А и К, скорость и ускорение точки А. К определяемым параметрам относятся координаты, скорость и ускорение точки С. При кинематическом анализе данной группы был применён метод преобразования координат.

Прежде всего, вычислим координаты точки О1, находящейся на пересечение двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точки К и А, координаты которых заданы. Из аналитической геометрии известно, что угловые коэффициенты таких прямых связаны между собой зависимостью:

К1\*К2 = - 1, (2.23)

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точку К в заданном направлении под углом ϕм, равен:

К1 = tg (ϕм), (2.24)

##### Тогда

##### К2 = -1/К1, (2.25)

Записав уравнения прямых с угловыми коэффициентами и решая их совместно, вычислим координаты точки О1:

**,** (2.26)

**,** (2.27)

Угол, составляющий с осью ОХ вспомогательной системы О1Y

ϕ = ϕм – 90, (2.28)

тогда

**,** (2.29)

По величине угла ϕ можно определить и угол поворота координатных осей

ϕ1 = ϕ – 90, (2.30)

На рис.2.5 этот угол совпадает с заданным углом ϕм. В общем случае они не равны, так как точка А может находиться по обе стороны направляющей движения звена 3.

** ,** (2.31)

Координаты точки В в системе Х1ОY1 можно вычислить:

Y1B = L3\*sin (Θ), (2.32)

В треугольнике АВО1 угол ВАО1 найдется:

**,** (2.33)

**,** (2.34)

Координаты точки В в системе ХОY:

**,** (2.35)

**,** (2.36)

##### Угол ориентации звена 2 можно представить:

**,** (2.37)

Методика определения скоростей и ускорений не отличается от аналогичных операций для других групп.

С использованием прикладной программы Mathcad определим перемещения b(i), скорости vb(i), ускорения ab(i) для точки В группы Ассура второго класса второго вида. Программа будет иметь вид:

























## Рис. 2.6. Кинематические характеристики для группы Ассура второго класса второго вида

## Проведем кинематический анализ группы второго класса третьего вида.

Исходными параметрами для данной группы являются координаты, скорость и ускорение точки А, неподвижной точки С, длины звеньев 2 и 3, жёсткий угол Θ. Вычисляемыми являются координаты, скорость и ускорение точки В.

Как и в случае с группами первого и второго вида здесь также применён метод преобразования координат. Прежде всего, определим угол поворота новой системы координат относительно системы XOY. Расстояние между точками А и С вычисляется по формуле:

**,** (2.38)

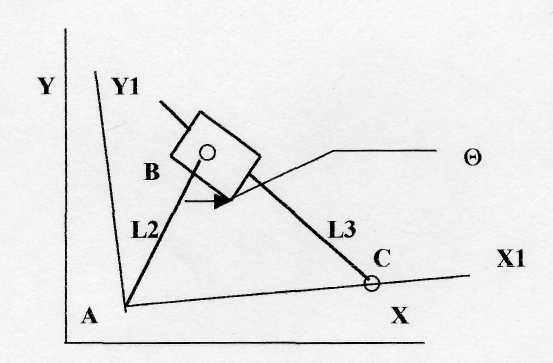


Рис. 2.7. Группа Ассура второго класса третьего вида

Угол наклона прямой АС к оси абсцисс можно найти:

**,** (2.39)

Тогда угол поворота осей ϕ1 будет равен углу ориентации вектора АС:

**,** (2.40)

Определим в системе X1AY1 координаты какой – либо точки звена 2, например точки В на пересечении пересечения звеньев 2 и 3.

Из треугольника АВС по теореме синусов получим

**,** (2.41)

Тогда угол ВАС определится по формуле (2.42)

ВАС = π - Θ - arcsin (BCA), (2.42)

##### Координаты точки В в подвижной системе координат можно вычислить:

X1B = L2\*cos(BAC), (2.43)

Y1B = P\*L2\*sin(BAC), (2.44)

##### Координаты точки В в основной системе можно представить выражениями:

**,** (2.45)

**,** (2.46)

Расстояние между точками В и С можно найти:

**,** (2.47)

Углы наклона звеньев 2 и 3 к оси абсцисс:

**,** (2.48)

**,** (2.49)

Определение скоростей и ускорений точки В производится также как и для групп первого и второго классов.

Получив кинематические характеристики для рассматриваемого механизма второго класса необходимо провести тестирование программы. Тестирование будем проводить по угловым ускорениям звена BC. Сравнение полученных угловых ускорений проведем как по характеру изменения закономерности ускорений, так и количественным признаком, приведенным в книге [ ]. Характер изменения угловых ускорений для механизма, состоящего из 4-х звеньев и рассчитанных согласно приведенной в работе программе, представлен на рис. 2.8, а согласно [ ] на рис.2.9. Значения звеньев механизма как предложенного нами, так и приведенные в книге идентичны. В представленной книге значения кинематических характеристик получены матричным методом.

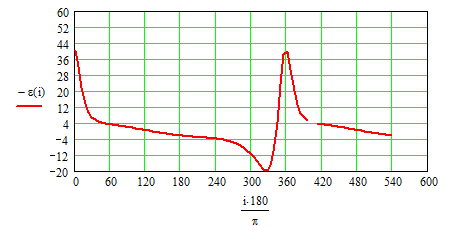


Рис. 2.8. Угловые ускорения звена ВС, определенные с помощью предложенной программы.

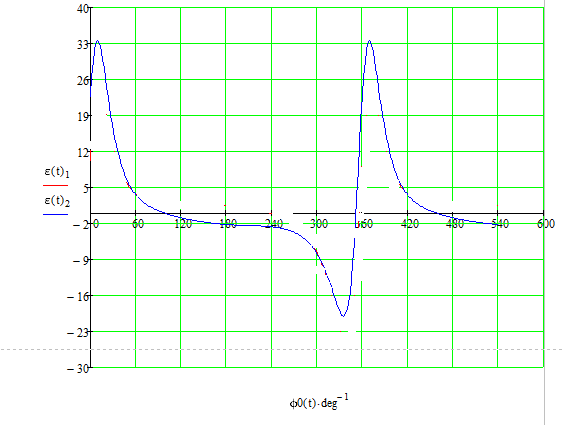


Рис. 2.9. Угловые ускорения звена ВС, определенные с помощью матричного метода, приведенного в [ ].

Выводы:

1. Разработанная программа для определения кинематических характеристик позволяет проводить анализ и синтез механизмов второго класса первого, второго и третьего порядка.

2. Расхождение результатов по величине угловых ускорений для рассмотренного механизма и аналогичного механизма, приведенного в [ ] составляет менее 3%.

3. Характер изменения закона углового ускорения для предложенного и рассмотренного в [ ] идентичны.

